§3.5 向量组的秩

教学目的和要求 正确理解和掌握极大线性无关组和基的概念, 基与极大线性无关组的联系和区别. 掌握相关性质和判定方法.

定义 设在线性空间 V 中有一组向量 S(可能有限个向量，可能无限个向量). 如果在这一组向量中存在向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关;

(2) 在 S 中任意向量都可以表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合.

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是向量组 S 的一个极大线性无关组.

注 1 定义中条件 (2) 表明：向量组 S 中任取一个向量 α, 则 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 必线性相关. 这是 " 极大 " 的意思.

注 2 S 中的向量都由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性表示，表示法唯一.

注 3 任意有限个向量组成的向量组必有极大线性无关组.

注 4 一般地， S 的极大线性无关组不唯一. 如在 $S = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ 中, 任意两个向量都是极大线性无关组.

引理 1 设 A, B 是 V 中的两组向量且 A 含有 r 个向量， B 含有 s 个向量，如果 $r > s$ 且 A 组向量中任一向量均可由 B 中的向量线性表示，则 A 中的向量线性相关.

证明 反证法. 假设 A 中的向量线性无关. 设 $A = \{\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_r\}, B = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$ 且 $r > s$. 由已知， α_1 可表为 B 组向量的线性组合，即存在 a_1, $a_2, \cdots, a_s$ 使 $\alpha_1 = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_s\beta_s$. 因为 A 中向量线性无关，因此 $\alpha_1 \neq 0$, 故 a_i 中至少有一个不为 0, 不妨设 $a_1 \neq 0$. 这时有 $\beta_1 = \frac{1}{a_1}\alpha_1 - \frac{a_2}{a_1}\beta_2 - \cdots - \frac{a_s}{a_1}\beta_s$, 即 A 中的向量可以由 $\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表出.

为此可设 B 组向量已换成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \cdots, \beta_s$, A 中任一向量可以表为 α_1, $\cdots$, α_k, β_{k+1}, $\cdots$, β_s 的线性组合且设 $k < r$, 则 α_{k+1} 可表为 $\alpha_{k+1} = b_1\alpha_1 + \cdots + b_k\alpha_k + b_{k+1}\beta_{k+1} + \cdots + b_s\beta_s$, 其中至少有一 $b_i \neq 0$, $k + 1 \leq i \leq s$. 否则， α_{k+1} 可由

$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 线性表示，这与 A 组线性无关矛盾．不失一般性，不妨设 $b_{k+1} \neq 0$, 与上面相同的论证，又可以将 β_{k+1} 换成 α_{k+1}, 得到向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1}, \beta_{k+2}, \cdots, \beta_s$ 且 A 中任一向量均可表为这个向量组的线性组合．继续做下去，因 $r > s$, 可将 A 中 s 个向量换入 B, 设 B 经调换后的向量为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 则 α_r 也可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性组合来表示，从而 A 组向量线性相关．矛盾． □

引理 2 若 A, B 是两组线性无关的向量组且所含向量个数有限，又设 A 中任一向量可表为 B 中向量的线性组合， B 中任一向量可表为 A 中向量的线性组合，则 A, B 所含向量个数相等.

证明 设 A 有个 r 向量， B 有 s 个向量，由引理 1 知 $r \leq s$ 且 $s \leq r$, 所以 $r = s$. □

定理 设 A, B 都是向量组 S 的极大线性无关组，且 A, B 是有限集，则 A 和 B 所含向量个数相同.

定义 设 S 是 K 上线性空间 V 的向量集合，则 S 中任一极大线性无关组所含向量的个数称为 **向量组的秩**, 记为 $r(S)$.

定义 设 A, B 是两组向量，若 A 中的任意向量可由 B 中向量线性表出， B 中任意向量可由 A 中向量线性表示，则称 **向量组 A 与向量组 B 等价**.

注 向量组的等价是等价关系，即满足反身性，对称性，传递性.

命题 等价的向量组有相同的秩.

证明 设 A, B 是等价的向量组， A_1, B_1 分别是 A, B 的极大线性无关组，因为 A_1 可由 B_1 线性表出，且 A_1 线性无关，所以 $r(A) \leq r(B)$. 同理 $r(B) \leq r(A)$. □

注 命题的逆不成立，即 $r(A) = r(B)$ 未必有 A 与 B 等价．例如，在 K^2 中， $A = \{(1,0)'\}$, $B = \{(0,1)'\}$, 则 $r(A) = r(B) = 1$, 但是 A 与 B 不等价.

下面讨论 $S = V$ 的情况.

定义 设 V 是数域 K 上线性空间，如果 V 中存在 n 个向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 满足

(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关；

(2) V 中任意向量可表示为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的线性组合，

则称 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基．且称 V 为 n 维线性空间．如果不存在有限个向

量构成 V 的基，则称 V 为无限维线性空间.

注 显然， V 中极大线性无关组是 V 的基． n 维线性空间的基都含有 n 个向量．如果 V 是 n 维空间，则记为 $\dim V = n$.

推论 1 n 维线性空间的任意 $n+1$ 个向量必线性相关.

例 1 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$. 因为 2 是一组基向量， $\frac{6}{7}$ 也是一组基.

例 2 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.

例 3 $K^{m\times n}$ 是 K 上 $m\times n$ 矩阵全体组成的空间．令 E_{ij} 是第 (i,j) 个元素为 1, 其余元素为 0 的矩阵，则 $E_{ij}, 1 \le i,j \le n$, 组成 $K^{m\times n}$ 的一组基．因而 $\dim K^{m\times n} = mn$.

例 4 K^n 是 K 上 n 维列向量空间，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是标准单位列向量, 则 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是基，所以 $\dim K^n = n$.

例 5 在数域 K 上次数小于或等于 n 的一元多项式全体对于多项式的加法和数乘构成线性空间 $K_n[x]$ 中 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 是一组基.

命题 设 V 是 n 维线性空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 中 n 个向量，若满足下列条件之一，则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基.

(1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关;

(2) V 中向量均可表为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的线性组合.

证明 (1) 因为 V 是 n 维线性空间，对任意 $\alpha \in V$, 根据推论 2, $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性相关；又因为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关，所以 α 可表示为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的线性组合．由定义， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基.

(2) 设 $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_m}$ 是 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的一个极大线性无关组，则 $m \le n$. 又 $\dim V = n$, 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的任意一个基，根据条件， $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出，而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可由 $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_m}$ 线性表出，从而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可由 $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \cdots, \varepsilon_{i_m}$ 线性表示．根据引理 1, 知 $m \ge n$. 所以 $m = n$, 即 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关．由定义， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基.

例 6 设 $\dim V = n$, 且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基．如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, $r < n$, 是线性无关的，必可在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 中取 $n-r$ 个向量与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 凑成 V 的基.

证明 当 $r < n$ 时，根据引理 1, 存在 ε_i, 使得 ε_i 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出．不妨设 $i = 1$, 则 $\varepsilon_1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关．如果 $r + 1 = n$, 则结论成立；如果 $r + 1 < n$, 则继续做下去．由归纳，知结论成立． □

例 7 在 $K^{2\times 2}$ 中，证明 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 线性无关，并扩为 $K^{2\times 2}$ 的基.

作业： P_{119} 1, 2, 4, 5, 7, 8

思考题： P_{119} 3, 10