§3.4 向量的线性关系

教学目的和要求 熟练掌握线性相关，线性无关的定义，掌握判定向量组的线性关系的方法. 结合作业，严格数学推理逻辑和表达能力的训练.

定义 设 V 是 K 上线性空间，若存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta\in V$, 使得

$$\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m,$$

则称 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，或称 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

定义 设 V 是数域 K 上线性空间， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 V 中 m 个向量，若存在不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0,$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关. 反之，若不存在不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使得 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0$, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

注 1 线性无关的等价定义：若存在 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使得 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0$, 则 $a_1=a_2=\cdots=a_m=0$.

注 2 定义中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 必须属于 K. 在线性空间 ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 中， $1,i$ 是线性无关；在线性空间 ${}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ 中， $1,i$ 是线性相关的.

例 1 (1) 设 $\alpha\in V$, 则 α 线性相关的充分必要条件是 $\alpha=0$;

(2) 包含 0 向量的向量组必线性相关；

(3) 设 $\alpha,\beta\in V$, 则 α,β 线性相关的充分必要条件是 α,β 成比例. 特别地，设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是 $K^{1\times n}$ 中两个 n 维行向量，则 α,β 线性相关的充分必要条件是 $a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$.

例 2 记 $e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$ 是 n 维标准单位行向量，则它们线性无关.

例 3 设 $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(-1,2,2),\alpha_3=(1,2,4)$. 因为 $2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

例 4 判定 $(2,3,0),(-1,4,0),(0,0,2)$ 是线性相关还是线性无关.

解 设 $a_1(2,3,0)+a_2(-1,4,0)+a_3(0,0,2)=0$. 考虑线性方程组

$$\begin{cases} 2a_1-a_2=0; \\ 3a_1+4a_2=0; \\ 2a_3=0. \end{cases}$$

解得 $a_1=0,a_2=0,a_3=0$. 所以 $(2,3,0),(-1,4,0),(0,0,2)$ 是线性无关的.

例子说明我们可以将 n 维行 (列) 向量的线性相关性问题转化为线性方程组问题. 事实上，我们有一般的结论：

例 5 设 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in K^{n\times 1}$. 则

(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m$ 有解;

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0$ 只有零解;

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0$ 有非零解.

定理 1 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性相关的向量，则任一包含这组向量的向量组必线性相关.

证明 考虑因为包含 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 故存在一组不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使得 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0$. 所以存在一组不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, $b_1=b_2=\cdots=b_s=0$, 使得 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m+b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_s\beta_s=0$. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关. □

定理 2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 K 上线性空间 V 的向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关充分必要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

证明 必要性. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 则存在一组不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使得 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0$. 不妨设 $a_1\neq 0$, 则有 $\alpha_1=-\frac{a_2}{a_1}\alpha_2-\frac{a_3}{a_1}\alpha_2\cdots-\frac{a_n}{a_1}\alpha_m$. 即 α_1 是其余向量的线性组合.

充分性. 设在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中，有一个向量是其余向量的线性组合. 不妨设 α_1 是其余向量的线性组合. 则存在 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 使得 $\alpha_1=a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m$. 这样，存在一组不全为零的数 $-1,a_2,\cdots,a_m$ 使得 $(-1)\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m=0$. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关. □

定理 3 设在 V 中 $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m$ ，则表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

证明 必要性. 设 $b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_m\alpha_m$ ，则有 $\beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_m + b_m)\alpha_m$. 由于表示法唯一，故 $a_i + b_i = a_i$, $1 \le i \le m$, 即 $b_i = 0$, $1 \le i \le m$. 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

充分性. 设还有 $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_m\alpha_m$. 则有 $0 = (a_1 - b_1)\alpha_1 + (a_2 - b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_m - b_m)\alpha_m$. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 所以 $a_i - b_i = 0, 1 \le i \le m$. 即 $a_i = b_i$, $1 \le i \le m$. 故表示法唯一. $\square$

例 6 设 $A \in K^{n\times n}$, $A^m = 0$, $A^{m-1} \neq 0$. 求证：存在 $X \in K^n$, 使得 X, AX, $A^2X, \cdots, A^{m-1}X$ 线性无关.

证明 首先证明存在 $X \in K^n$, 使得 $A^{m-1}X \neq 0$. 事实上，因为 $A^{m-1} \neq 0$, 不妨设 $a_{ij} \neq 0$. 令 $X = e_j$, 则有 $A^{m-1}X \neq 0$.

设 $a_0X + a_1AX + a_2A^2X + \cdots + a_{m-1}A^{m-1}X = 0$. 考虑系数, 设在 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$ 中第一个不为 0 的是 a_i. 等式两边同乘 A^{m-i-1}, 因为 $A^mX = 0$, 得到 $a_iA^{m-1}X = 0$. 根据 $A^{m-1}X \neq 0$, 得到 $a_i = 0$. 矛盾. 所以 $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0$, 即 $X, AX, A^2X, \cdots, A^{m-1}X$ 线性无关. $\square$

例 7 设 α, β, γ 线性无关，问 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 是否线性无关？

解 设 $a(\alpha + \beta) + b(\beta + \gamma) + c(\gamma + \alpha) = 0$, 则有 $(a_c)\alpha + (a + b)\beta + (b + c)\gamma = 0$. 因为 α, β, γ 线性无关. 所以 $a + c = 0, b + c = 0, a + b = 0$. 解得 $a = b = c = 0$. 故 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 线性无关. $\square$

注：线性相关和线性无关的概念，不能说成是向量组 ” 有关 ”, ” 线性不相关 ”.

课堂讨论

$P_{114}, 3, 4, 5, 6, 7.10$

作业

P_{114}, 2, 8, 9, 11, 12