# §3.2 – §3.3 线性空间

**教学目的和要求** 熟练掌握线性空间的定义和基本性质；正确判断一个集合对于给定的运算是否构成线性空间；准确地用元素的性质描述一个集合.

**定义** 设 $K$ 是一个数域，$V$ 是一个非空集合, 在 $V$ 上定义一个加法 $V \times V \to V$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$, 和一个运算数乘 $K \times V \to V$, $(a, \alpha) \mapsto a\alpha$, 若满足：

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) 在 $V$ 中存在元素 0, 使对任意 $\alpha \in V$, 有 $\alpha + 0 = \alpha$;

(4) 对于 $v$ 中每个元素 $\alpha$, 存在 $\beta$, 使 $\alpha + \beta = 0$;

(5) $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$;

(6) $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$;

(7) $(ab)\alpha = a(b\alpha)$;

(8) $1\alpha = \alpha$,

则称 $V$ 是上线性空间 (向量空间), $V$ 中元素称为向量， 0 称为零向量， $\alpha + \beta = 0$ 中的 $\beta$ 称为是 $\alpha$ 的负向量.

**例** 1 数域 $K$ 上 $n$ 维列向量集合对于向量的加法和数乘构成一个线性空间，记为 $K^{n\times 1}$(或 $K^n$); 数域 $K$ 上 $n$ 维行向量集合对于向量的加法和数乘构成一个线性空间，记为 $K^{1\times n}$.

**例** 2 数域 $K$ 上一元多项式全体 $K[x]$ 对于多项式的加法和数乘构成线性空间. 数域 $K$ 上次数小于或等于 $n$ 的一元多项式全体 $K_n[x]$ 对于多项式的加法和数乘构成线性空间.

**例** 3 数域 $K$ 上 $m \times n$ 矩阵全体 $K^{m\times n}$ 对于矩阵的加法和数乘构成线性空间.

**例** 4 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上线性空间， $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上线性空间.

**注** $\mathbb{R}$ 不是 $\mathbb{C}$ 上线性空间， $\mathbb{Z}$ 不是 $\mathbb{Q}$ 上线性空间.

**例** 5 零空间.

**性质** 1 零向量唯一. 事实上，设 $0_1, 0_2$ 都是零向量，则 $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$.

**性质** 2 负向量唯一. 事实上，设 $\alpha + \beta_1 = 0 = \alpha + \beta_2$, 则 $\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2$. $\alpha$ 的负向量记为 $-\alpha$. 可以定义向量的减法 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

**性质** 3 对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$,

(1) 若 $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, 则 $\beta = \gamma$;

(2) $0\alpha = 0$, 因为 $\alpha = 0 + \alpha = 1\alpha = (0+1)\alpha = 0\alpha + 1\alpha = 0\alpha + \alpha$, 由 (1), 得 $0\alpha = 0$;

(3) $a0 = 0$, 因为 $a\alpha + a0 = a(\alpha + 0) = a\alpha$, 消去得 $a0 = 0$;

(4) $(-1)\alpha = -\alpha$, 因为 $\alpha + (-\alpha) = 0, -\alpha = (-1)\alpha$;

(5) $a\alpha = 0$, 则或 $a = 0$ 或 $\alpha = 0$, 因为设 $a \neq 0$, 则 $0 = a^{-1}a\alpha = \alpha$.

**例** 5 已知向量 $\alpha_1 = (1, -1, 0, -1)$, $\beta = (-2, 1, 0, 0)$, $\gamma = (-1, -2, 0, -1)$, 则 $\alpha + \beta + \gamma = (-2, -2, 0, -2)$, $3\alpha - \beta + 5\gamma = (0, -14, 0, -8)$.

作业： $P_{109}$，1(1)(2)

作业补充： (1). $\mathbb{R}^+$, 定义加法为 $a \oplus b = ab$, 数乘为 $k \cdot \alpha = a^k$, 是否是 $\mathbb{R}$ 上线性空间.

(2). 平面上全体向量，通常加法与数乘 $a \cdot \alpha = 0$, 是否是 $\mathbb{R}$ 上线性空间.

思考题： $P_{109}$ 1(3)(4)