第三章　线性空间

§3.1 数域

教学目的和要求 熟练掌握定义，正确判断数域和数环.

定义 设 K 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子集且至少有两个不同的元素，如果 K 中任意两个数的和，差，积，商 (除数不为零) 仍然属于 K ，则称 K 是一个数域.

注 将加法，减法，乘法封闭 (不一定除法封闭) 的数集称为数环.

例 1 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 是数域， $\mathbb{Z}$ 是数环但不是数域.

例 2 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ 构成一个数域. 事实上， $1, 0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 若 $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 则

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

若 $c + d\sqrt{2} \neq 0$, 则 c, d 不同时为 0, 故

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

例 3 π 是圆周率，形如

$$\frac{a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n}{b_0 + b_1\pi + \cdots + b_m\pi^m}$$

的数全体构成一个数域，其中 $m, n \geq 0, a_i, b_j \in \mathbb{Q}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$, 且 b_j 不全为 0.

注 2 π 是超越数，即 $b_0 + b_1\pi + \cdots + b_m\pi^m \Longleftrightarrow b_0 = b_1 = \cdots = b_m = 0$.

例 4 $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是数环而不是数域.

例 5 (1) 所有偶数集合是数环，非数域;

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) := \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域;

(3) $W := \{a\sqrt[3]{2} \mid a \in \mathbb{Q}\}$ 不是数环, 更不是数域. 因为 $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$ 不属于 W.

命题 1 任意数域必包含 $0, 1$.

证明 设 K 是一个数域，包含两个不同的数，所以比包含一个非零数．不妨设 $a \neq 0$. 则 $a - a = 0 \in K$, $a/a = 1 \in K$. □

命题 2 任意数域必包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

证明 设 K 是一个数域，包含 $0, 1$, 则 $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, $\cdots$, 同时 $0 - 1 = -1$, $-1 - 1 = -2$, $-2 - 1 = -3$, $\cdots$, 所以 K 包含所有整数．对于 $p, q \in \mathbb{Z}$ 且 $q \neq 0$, 则因为除法封闭， $p/q \in K$, 所以 $K\mathbb{Q}$. □

命题 3 实数域 $\mathbb{R}$ 与复数域 $\mathbb{C}$ 中不存在其他任何数域.

证明 设 K 是一个数域满足 $\mathbb{R} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. 设 $\mathbb{R} \neq K$, 则存在 $a+bi \in K$, $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $b \neq 0$. 由于减法封闭和除法封闭，有 $bi = a + bi - a \in K$, $i = bi/b \in K$. 这样，对于任意 $c + di \in \mathbb{C}$, 因为 $1, i \in K$, 都有 $c + di \in K$. 即 $K = \mathbb{C}$. □

注 数域的等价定义：设 K 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子集且包含 $0, 1$ ，如果 K 中任意两个数的和，差，积，商 (除数不为零) 仍然属于 K ，则称 K 是一个数域.

作业： P_{103} 3

思考： $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) := \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ 是否为数域？