§4.5 不变子空间

教学目的和要求 熟练掌握不变子空间的定义与导出线性变换，正确理解线性变换与它在不变子空间上导出变换的异同点；了解用矩阵刻画不变子空间的方法.

定义 1 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，设 U 是 V 的子空间，满足 $\varphi(U) \subseteq U$, 则称 U 是 $\varphi-$ 不变子空间 (或 $\varphi-$ 子空间). 将 φ 限制在 U 上，导出 U 上的线性变换，称为由 φ 导出的线性变换 (或称为 φ 在 U 上的限制), 记为 $\varphi|_U$.

注 1 φ 与 $\varphi|_U$ 的相同点是对应法则一样；差别点在于：　φ 是 V 的线性变换，$\varphi|_U$ 是 U 的线性变换.

例 1 (1) 线性空间 V 本身和零子空间是任一线性变换的不变子空间；

(2) 设 $\varphi = \lambda \mathrm{id}_V : V \to V$ 的数乘变换，则 V 的任一子空间都是 $\varphi-$ 子空间；

(3) 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换，V_1, V_2 是 $\varphi-$ 子空间, 则 $V_1+V_2, V_1\cap V_2$ 是 φ − 子空间.

例 2 设 φ 是 V 上线性变换，则 $\mathrm{Ker}\varphi, \mathrm{Im}\varphi$ 是 φ − 子空间.

证明 对于任意的 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi$, 有 $\varphi(\alpha) = 0 \in \mathrm{Ker}\varphi$, 所以 $\varphi(\mathrm{Ker}\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$. 对于任意 $\varphi(\alpha) \in \mathrm{Im}\varphi$, $\varphi(\varphi(\alpha)) \in \mathrm{Im}\varphi$, 所以 $\varphi(\mathrm{Im}\varphi) \subseteq \mathrm{Im}\varphi$. □

定理 1 设 U 是线性空间 V 上线性变换 φ 的不变子空间，设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 是 U 的一组基，扩为 V 的基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$, 则 φ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r,1} & a_{r+1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,r} & \cdots & a_{r,r} & a_{r+1,r} & \cdots & a_{n,r} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{n,r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (*)$$

反之，若 φ 在基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 下矩阵为 $(*)$, 则 $L(\xi_1, \cdots, \xi_r)$ 是 φ- 子空间.

推论 1 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换， $V = V_1 \oplus V_2, V_1$ 与 V_2 是 φ- 子空间， $\xi_1, \cdots, \xi_r$ 是 V_1 的一组基， $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 是 V_2 的一组基，则 φ 在基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

其中 A_1 为 r 阶方阵， A_2 为 $n-r$ 阶方阵. 反之，若 φ 在基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 下的矩阵为 $(*)$, 令 $V_1 = L(\xi_1, \cdots, \xi_r), V_2 = L(\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n)$, 则 V_1, V_2 都是 φ- 子空间，且 $V = V_1 \oplus V_2$.

注 2 推论可以推广到 m 个不变子空间的情况.

例 3 设 V 是 3 维线性空间， φ 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 求证： $U = L(\xi_3, \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3)$ 是 φ- 子空间.

证明 $\varphi(\xi_3) = -\xi_1 - \xi_2 = -(\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3) + 2\xi_3 \in U, \varphi(\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3) = 3\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_1 - 2\xi_2 = 2\xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3 = 2(\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3) \in U$, 所以 $\varphi(U) \subseteq U$, 即 U 是 φ- 子空间. $\square$

例 4 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换， $\varphi^2 = \varphi$, 求证存在子空间 W, 使得对于任意的 $\alpha \in W$, $\varphi(\alpha) = \alpha$; 若 φ 的秩 $< n$, 则存在非平凡子空间 U, 使得 $\varphi(U) = 0$ 且 $V = W \oplus U$.

证明 令 $\xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的基, 扩为 V 的基 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$, 则 $\varphi(\xi_1)$, $\cdots$, $\varphi(\xi_r)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基，令 $W = \mathrm{Im}\varphi$, 则对任意的 $\alpha \in \mathrm{Im}\varphi$, $\alpha = \Sigma_{i=1}^r a_i \varphi(\xi_i)$, $\varphi(\alpha) = \Sigma_{i=1}^r a_i \varphi^2(\xi_i) = \Sigma_{i=1}^r a_i \varphi(\xi_i) = \alpha$, 令 $U = \mathrm{Ker}\varphi$, 则 $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = 0$, 事实上, 设 $\beta \in \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi$, 则存在 $\alpha \in V$, 使 $\beta = \varphi(\alpha), 0 = \varphi(\beta) = \varphi^2(\alpha) = \varphi(\alpha) = \beta$, 又因为 $\mathrm{dimIm}\varphi + \mathrm{dimKer}\varphi = n$, 所以 $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$. $\square$

注 3 $\varphi^2 = \varphi, \varphi$ 在基 $\varphi(\xi_1), \cdots, \varphi(\xi_r), \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 用矩阵语言叙述，设 $A^2 = A \in K^{n \times n}$, 则 A 相似于矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即存在可逆矩阵 P, 使 $A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$.

注 4 一般地，虽然 $\mathrm{dimIm}\varphi + \mathrm{dimKer}\varphi = n$, 但未必有 $V = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$, 例:

$\varphi: K^{2\times 1} \longrightarrow K^{2\times 1}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Im}\varphi = \{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} | a \in K\}$.

作业： P_{179}： 1，2，3; 复习题 4 P_{179} 1，2

挑战题： P_{179} 6

讲授第五节时，有时间可继续由扩基构造线性映射的方法. 复习题中 10, 14, 15, 16, 18; 剩余的 11, 17, 19, 20 留习题课处理.

复习题 10 $\dim U = m, \dim V = n, m < n, \varphi: U \to V$ 单线性映射，求证存在满线性映射 $\psi: V \to U$, 使得 $\psi\varphi = \mathrm{id}_U$.

证法 1 设 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 是 U 的基，则因为 φ 是单射，所以 $\varphi(\xi_1), \cdots, \varphi(\xi_m)$ 线性无关，扩为 U 的基 $\varphi(\xi_1), \cdots, \varphi(\xi_m), \beta_{m+1}, \cdots, \beta_n$, 则存在线性映射 $\psi: V \to U$, 使得 $\psi(\varphi(\xi_i)) = \xi_i, 1 \le i \le m; \psi(\beta_j) = 0, m+1 \le j \le n$, 则 ψ 满线性映射且 $\psi(\varphi(\xi_i)) = \xi_i, 1 \le i \le m$, 所以 $\psi\varphi = 1$.

证法 2 设 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 是 U 的基， $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是 V 的基,

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_m) = (\eta_1, \cdots, \eta_n) A_{n\times m},$$

因为 φ 是单射，所以 $r(A) = m$, 存在 $B \in K^{m\times n}, r(B) = m$, 使 $BA = I$, 事实上, 因为 $r(A) = m$, 所以存在可逆矩阵 $P \in K^{n\times n}, Q \in K^{m\times m}$, 使 $A = P\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} Q$, 令 $B = Q^{-1}(I_m, 0)P^{-1} \in K^{n\times m}$, 则有 $r(B) = m$, 且 $BA = I$, 令 $\psi: V \to U$ 是如下决定的线性映射 $\psi(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_m)B$, 则有 $\psi\varphi = \mathrm{id}_U$. □

复习题 18 $\varphi: V \to U$ 线性映射，求证存在线性映射 $\psi: U \to V$, 使 $\varphi\psi\varphi = \varphi$.

证法 1 设 $\dim V = m, \xi_1, \cdots, \xi_m$ 是一组基，且 $\dim U = n, \eta_1, \cdots, \eta_n$ 是一组基，使得

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_m) = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即 $\varphi(\xi_i) = \eta_i, 1 \le i \le r; \varphi(\xi_j) = 0, r+1 \le j \le m$, 令 $\psi(\eta_i) = \xi_i, 1 \le i \le r; \varphi(\eta_j) = 0, r+1 \le j \le n$, 则 ψ 是线性映射, 且有 $\varphi\psi\varphi(\Sigma_{i=1}^m a_i\xi_i) = \varphi\psi(\Sigma_{i=1}^r a_i\eta_i) = \varphi(\Sigma_{i=1}^r a_i\xi_i) = \Sigma_{i=1}^r a_i\eta_i = \varphi(\Sigma_{i=1}^m a_i\xi_i)$, 即 $\varphi\psi\varphi = \varphi$.

证法 2 设 $\dim V = m, \xi_1, \cdots, \xi_m$ 是一组基，且 $\dim U = n, \eta_1, \cdots, \eta_n$ 是一组

基，使得

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_m)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}$，令 $\psi: U\to V$ 是由下列式子确定的线性映射

$$\psi(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_m)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

则根据同构对应，有 $\varphi\psi\varphi=\varphi$. □