§4.4 线性映射的像与核

教学目的和要求 熟练掌握线性映射 φ 的核 $\mathrm{Ker}\varphi$ 与像 $\mathrm{Im}\varphi$ 的概念及用于刻画 φ 的单射，满射；熟练掌握和应用维数公式；学会对具体例子计算 $\mathrm{Ker}\varphi$ 和 $\mathrm{Im}\varphi$; 掌握维数公式证明过程中应用到的扩基方法和同构方法. 理解用线性映射证明矩阵秩的命题的方法.

引理 1 设 $\varphi : V \longrightarrow U$ 是线性映射.

(1) 若 V' 是 V 的子空间，则 $\varphi(V') = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in V'\}$ 是 U 的子空间;

(2) 若 U' 是 U 的子空间，则 $\varphi^{-1}(U') = \{\alpha \in V|\varphi(\alpha) \in U'\}$ 是 V 的子空间.

证明 (1) 因为 $\varphi(0) = 0 \in \varphi(V')$, 所以 $\varphi(V') \neq \emptyset$.

对于 $\varphi(\alpha), \varphi(\beta) \in \varphi(V')$, 其中 $\alpha, \beta \in V'$, 有 $\alpha + \beta \in V'$, 所以 $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \beta) \in \varphi(V')$.

对于 $\varphi(\alpha) \in \varphi(V')$, 其中 $\alpha \in V'$, 则对于任意的 $a \in K$, $a\alpha \in V'$, $a\varphi(\alpha) = \varphi(a\alpha) \in \varphi(V')$. 所以 $\varphi(V')$ 是 U 的子空间.

(2) 因为 $0 \in V, \varphi(0) = 0 \in U'$, 所以 $\varphi^{-1}(U') \neq \emptyset$.

对于 $\alpha, \beta \in \varphi^{-1}(U')$, 有 $\varphi(\alpha), \varphi(\beta) \in U'$, 所以 $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \in U'$, 故 $\alpha + \beta \in \varphi^{-1}(U')$.

对于 $\alpha \in \varphi^{-1}(U')$, 则 $\varphi(\alpha) \in U'$. 所以对于任意的 $a \in K$, $a\varphi(\alpha) \in U'$, 故 $\varphi(a\alpha) = a\varphi(\alpha) \in U'$. 这样 $\lambda\alpha \in \varphi^{-1}(U')$. 所以 $\varphi^{-1}(U')$ 是 V 的子空间. □

定义 1 设 $\varphi : V \to U$ 是线性映射，记

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(\alpha)|\alpha \in V\}, \quad \mathrm{Ker}\varphi = \{\alpha \in V|\varphi(\alpha) = 0\},$$

分别称为线性映射的 **像** 和 **核**. $\dim\mathrm{Im}\varphi$ 称为 φ 的 **秩**, $\dim\mathrm{Ker}\varphi$ 称为 φ 的 **零度**.

定理 1 设 $\varphi : V \to U$ 是线性映射，则 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 U 的子空间， $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 V 的子空间.

证明 由引理 1, $\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0), \mathrm{Im}\varphi = \varphi(V)$. □

推论 1 下列条件是等价的：

(1) $\mathrm{Ker}\varphi = V$;

(2) $\mathrm{Im}\varphi = 0$;

(3) $\varphi = 0$. $\square$

推论 2 (1) $\mathrm{Ker}\varphi = 0$ 的充分必要条件是 φ 是单射；

(2) $\mathrm{Im}\varphi = U$ 的充分必要条件是 φ 是满射. $\square$

例 1 设线性变换 $\varphi : K^{1\times 2} \longrightarrow K^{1\times 2}, (a_1, a_2) \longmapsto (a_2, 0)$, 则 $\mathrm{Im}\varphi = \{(b, 0)|b \in K\} \cong K, \mathrm{Ker}\varphi = \{(a, 0)|a \in K\} \cong K$ 且 $\varphi^2 = 0$.

例 2 设 $A \in K^{n\times m}$. 定义线性映射 $\mathcal{A} : K^{m\times 1} \to K^{n\times 1}$, $X \mapsto AX$. 记 $A = (A_1, A_2, \cdots, A_m)$, 则 $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{AX = 0\text{的解空间}\}, \mathrm{Im}\mathcal{A} = \{A\text{的列空间}\} = L(A_1, A_2, \cdots, A_m)$.

证明 $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{X \in K^{m\times 1}|AX = 0\}$, $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \{AX|X \in K^{m\times 1}\} = L(Ae_i, 1 \le i \le m) = L(A_1, A_2, \cdots, A_m)$. $\square$

定理 2 设 V 是 m 维线性空间， $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 是 V 的一组基， U 是 n 维线性空间， $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 U 的基， $\varphi \in L(V, U)$,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)A_{n\times m}.$$

则

$$\mathrm{dimIm}\varphi = r(A), \quad \mathrm{dimKer}\varphi = m - r(A).$$

证明 引用上节定理 2 的记号，我们断言： $(1)\sigma_2(\mathrm{Im}\varphi) = \mathrm{Im}\mathcal{A}$; $(2)\sigma_1(\mathrm{Ker}\varphi) = \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. 事实上, $\sigma_2(\mathrm{Im}\varphi) = \sigma_2\varphi(V) = \mathcal{A}\sigma_1(V) = \mathcal{A}(K^n) = \mathrm{Im}\mathcal{A}$; 若 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi, \varphi(\alpha) = 0$, 所以 $\mathcal{A}\sigma_1(\alpha) = \sigma_2\varphi(\alpha) = 0$, 所以 $\sigma_1(\mathrm{Ker}\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. 反之, 设 $\beta \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}, \mathcal{A}(\beta) = 0$, 由于 σ_1 是同构，所以存在 $\alpha \in V$, 使 $\sigma_1(\alpha) = \beta$, 于是 $\sigma_2\varphi(\alpha) = \mathcal{A}\sigma_1(\alpha) = \mathcal{A}(\beta) = 0$, 由于 σ_2 同构，所以 $\varphi(\alpha) = 0$, 故 $\alpha \in \mathrm{Ker}\varphi, \beta \in \sigma_1(\mathrm{Ker}\varphi)$, 所以 $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \subseteq \sigma_1(\mathrm{Ker}\varphi)$, 所以 $\sigma_1(\mathrm{Ker}\varphi) = \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

结合例 2, 即得结论. $\square$

推论 3(**线性映射的维数公式**) 设 V 是 m 维线性空间， $\varphi : V \longrightarrow U$ 是线性映

射，则

$$\mathrm{dimIm}\varphi+\mathrm{dimKer}\varphi=m.$$

注 1 下面给出维数公式的另外证明方法. 注意掌握证明方法 2 中的扩基的思想方法.

维数公式的证法 2 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\ \xi_r$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基，扩为 V 的基 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_m$, 下面证明 $\varphi(\xi_{r+1}),\cdots,\varphi(\xi_m)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi$ 的一组基. 事实上,

(1) 设 $a_{r+1}\varphi(\xi_{r+1})+\cdots+a_m\varphi(\xi_m)=0$, 则 $\varphi(a_{r+1}\xi_{r+1}+\cdots+a_m\xi_m)=0$, 所以 $a_{r+1}\xi_{r+1}+\cdots+a_m\xi_m\in\mathrm{Ker}\varphi$, 故存在 $a_1,\cdots,a_r$, 使 $a_{r+1}\xi_{r+1}+\cdots+a_m\xi_m=a_1\xi_1+\cdots+a_r\xi_r$. 因为 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\xi_{r+1},\cdots,\xi_m$ 线性无关，所以 $a_1=\cdots=a_r=a_{r+1}=\cdots=a_m=0$, 故 $\varphi(\xi_{r+1}),\cdots,\varphi(\xi_m)$ 线性无关.

(2) 对于任意的 $\varphi(\alpha)\in\mathrm{Im}\varphi$, 其中 $\alpha\in V$, 有 $\alpha=\Sigma_{i=1}^m a_i\xi_i$, 所以 $\varphi(\alpha)=\Sigma_{i=1}^m a_i\varphi(\xi_i)=\Sigma_{i=r+1}^m a_i\varphi(\xi_i)$, 即 $\varphi(\alpha)$ 可由 $\varphi(\xi_{r+1}),\cdots,\varphi(\xi_m)$ 线性表出. □

维数公式的证法 3 设 V 是 m 维线性空间， U 是 n 维线性空间，对于 $\varphi\in L(V,U)$, 根据上节推论 3, 存在 V 的基 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 和 U 的基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 使得

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_m)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

易见 $\mathrm{Im}\varphi=L(\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_r),\varphi(\xi_{r+1}),\cdots,\varphi(\xi_m))=L(\eta_1,\cdots,\eta_r)$, 所以 $\mathrm{dimIm}\varphi=r$. 下面证明 $\mathrm{Ker}\varphi=L(\xi_{r+1},\cdots,\xi_m)$. 事实上, 显然 $\mathrm{Ker}\varphi\supseteq L(\xi_{r+1},\cdots,\xi_m)$. 另一方面，设 $\alpha=\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\in\mathrm{Ker}\varphi$. 则 $0=\varphi(\alpha)=\sum_{i=1}^n a_i\varphi(\xi_i)=\sum_{i=1}^r a_i\eta_i$. 故 $a_i=0$, $1\leq i\leq r$. 这样， $\alpha=\sum_{i=r+1}^n a_i\xi_i\in L(\xi_{r+1},\cdots,\xi_m)$. 故 $\mathrm{Ker}\varphi=L(\xi_{r+1},\cdots,\xi_m)$, $\mathrm{dimKer}\varphi=m-r$. □

推论 4 设 $\varphi:V\to U$ 是线性映射,

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A,$$

则

(1) φ 是单射的充分必要条件是 $r(A)=m$;

(2) φ 是满射的充分必要条件是 $r(A)=n$.

推论 5 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列等价：

(1) φ 是可逆映射;

(2) φ 是同构映射;

(3) φ 是单射;

(4) φ 是满射;

(5) φ 在一组基下的矩阵是可逆阵.

下面的例子给出计算维数的方法以及利用维数公式的应用.

例 3 设 V 是 5 维线性空间, $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5$ 是 V 的一组基, U 是 4 维线性空间, $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 是 U 的一组基, $\varphi\in L(V,U)$,

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{pmatrix}1&2&1&-3&2\\2&1&1&1&-3\\1&1&2&2&-2\\2&3&-5&-17&10\end{pmatrix},$$

求 $\mathrm{Im}\varphi$ 与 $\mathrm{Ker}\varphi$.

解 A 经过行的初等变换化为 $\begin{pmatrix}1&0&0&1&-\frac{9}{4}\\0&1&0&-3&\frac{11}{4}\\0&0&1&2&-\frac{5}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, 因此 $r(A)=3$, 所以 $\mathrm{dimIm}\varphi=3$. 因为 A 的前三列线性无关, 所以 $\mathrm{Im}\varphi=k_1(\eta_1+2\eta_2+\eta_3+2\eta_4)+k_2(2\eta_1+\eta_2+\eta_3+3\eta_4)+k_3(\eta_1+\eta_2+2\eta_3-5\eta_4),k_i\in K,1\leq i\leq 3$. 又因为 $AX=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}9\\-11\\5\\0\\4\end{pmatrix}$, 所以 $\mathrm{Ker}\varphi=k_1(-\xi_1+3\xi_2-2\xi_3+\xi_4)+k_2(9\xi_1-11\xi_2+5\xi_3+4\xi_4),k_i\in K,i=1,2.\square$

例 4 设 $\varphi: V\to V'$ 是线性映射, U 是 V 的子空间, 则

$$\mathrm{dimIm}\varphi(U)+\dim(\mathrm{Ker}\varphi\cap U)=\dim U.$$

证明 考虑 φ 导出线性映射 $\varphi':U\to\varphi(U)$, $\alpha\mapsto\varphi(\alpha)$, 则 $\mathrm{Ker}\varphi'=\mathrm{Ker}\varphi\cap U,\mathrm{Im}\varphi'=\varphi(U)$, 由维数公式即得结论. $\square$

注 2 $\dim U-\mathrm{dimKer}\varphi\leq\dim\varphi(U)\leq\dim U$.

例 5 设 $\varphi : V \longrightarrow V'$ 是线性映射， U 是 V' 的子空间，则

$$\dim(\mathrm{Im}\varphi \cap U) + \dim\mathrm{Ker}\varphi = \dim\varphi^{-1}(U).$$

证明 考虑 φ 导出的线性映射 $\varphi' : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$, $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$, 则 $\mathrm{Ker}\varphi' = \mathrm{Ker}\varphi, \mathrm{Im}\varphi' = \mathrm{Im}\varphi \cap U$, 由维数公式即得. $\square$

注 3 $\dim\varphi^{-1}(U) \leq \dim U + \dim\mathrm{Ker}\varphi$.

例 6 设 $A, B \in K^{n\times n}$, 求证：

$$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

证明 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为线性变换 $\mathcal{A} : K^n \longrightarrow K^n$, $X \mapsto AX; \mathcal{B} : K^n \longrightarrow K^n, X \mapsto BX$, 考虑 $\mathcal{A}$ 导出的映射 $\varphi : \mathrm{Im}\mathcal{B} \longrightarrow K^n, BX \mapsto ABX$, 则 $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Im}\mathcal{B} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}; \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\mathcal{AB}$, 由维数公式知 $\dim\mathrm{Im}\mathcal{B} = \dim\mathrm{Im}\mathcal{AB} + \dim(\mathrm{Im}\mathcal{B} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}) \leq \dim\mathrm{Im}\mathcal{AB} + \dim\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \dim\mathrm{Im}\mathcal{AB} + n - \dim\mathrm{Im}\mathcal{A}$, 即 $r(B) \leq r(AB) + n - r(A)$. 因为 $\mathrm{Ker}\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Ker}\mathcal{AB}$, 所以 $n - r(B) \leq n - r(AB)$, 故 $r(AB) \leq r(B)$. 另一方面 $\mathrm{Im}\mathcal{AB} \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{A}$, 所以 $r(AB) \leq r(A)$.

作业 P_{176} : 1, 2, 4, 5; P_{180} : 6, 7

(第 6,7 题的提示：对于 n 维线性空间 V 的任意有限个真子空间 $\{V_i\}_{1\leq i\leq m}$ 都不能覆盖 V, 即 $\bigcup_{1\leq i\leq m} V_i \subsetneq V$).