§4.3 线性映射与矩阵

教学目的和要求 本节内容是高等代数中的重要章节，体现了高等代数课程的重要思想. 要掌握线性映射 $\varphi: V \to U$ 由 V 的基的像唯一确定的思路并用于解题. 理解 $L(V,U) \cong K^{n\times m}$ 空间同构和 $L(V) \cong K^{n\times n}$ 作为代数同构及其在应用上的意义. 理解和掌握两个矩阵相抵的充分必要条件是他们同一个线性映射在两组不同的基下的矩阵；两个矩阵相似的充分必要条件是他们同一个线性变换在不同两组基下的矩阵. 掌握矩阵相似是等价关系. 同构的方法及其应用是高代中的重要思想方法之一，也是难点之一. 教学中力求讲透这种同构对应，对以后的映射问题与矩阵问题互相转化打好基础.

一. 基的像决定了线性映射

引理 1 设 V,U 是数域 K 上线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 V 的一组基，则：

(1) 设 $\varphi,\psi \in L(V,U)$, 且 $\varphi(\varepsilon_i)=\psi(\varepsilon_i)$, $1\le i\le m$, 则 $\varphi=\psi$;

(2) 对任意给定的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m \in U$, 存在唯一线性映射 $\varphi \in L(V,U)$, 使得 $\varphi(\varepsilon_i)=\beta_i, 1\le i\le m$.

证明 (1) 对任意 $\alpha\in V$, $\alpha=\Sigma_{i=1}^m a_i\varepsilon_i$, $\varphi(\alpha)=\varphi(\Sigma_{i=1}^m a_i\varepsilon_i)=\Sigma_{i=1}^m a_i\varphi(\varepsilon_i)=\Sigma_{i=1}^m a_i\psi(\varepsilon_i)=\psi(\Sigma_{i=1}^m a_i\varepsilon_i)=\psi(\alpha)$, 所以 $\varphi=\psi$.

(2) 定义 $\varphi: V\to U$, $\Sigma_{i=1}^m a_i\varepsilon_i \mapsto \Sigma_{i=1}^m a_i\beta_i$. 则易证 $\varphi\in L(V,U)$, 即 φ 是线性映射. 并且 $\varphi(\varepsilon_i)=\beta_i$. 为证明唯一性, 设存在 $\psi\in L(V,U)$, 使 $\psi(\varepsilon_i)=\beta_i$, $1\le i\le m$, 则 $\varphi(\varepsilon_i)=\psi(\varepsilon_i)$, $1\le i\le m$. 由 (1) 知 $\varphi=\psi$. □

注 1 引理 1 表明：线性映射 $\varphi: V\to U$ 由 V 的基的像唯一确定. 同时，表明下面的映射 Θ 是一一映射.

二. 线性映射与矩阵

设 V,U 是数域 K 上线性映射，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是 V 的一组基，$\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是 U 的一组基. 则

$$\begin{cases} \varphi(\xi_1) = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \cdots + a_{1n}\eta_n \\ \varphi(\xi_2) = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \cdots + a_{2n}\eta_n \\ \cdots\cdots \\ \varphi(\xi_m) = a_{m1}\eta_1 + a_{m2}\eta_2 + \cdots + a_{mn}\eta_n \end{cases} \quad (*)$$

形式上可以记为

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

即

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) A_{n\times m}. \quad (*)$$

其中 A 是唯一确定的，称为 φ 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 与 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的矩阵.

注 2 (1) $(*)$ 式表成立的充分必要条件是：在 U 中， $\varphi(\xi_i)$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下的坐标是 A 的第 i 列.

(2) 在取定基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 与 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 的前提下，线性映射 φ 唯一决定 $A \in K^{n\times m}$ 满足 $(*)$ 式. 反之，对 $A \in K^{n\times m}$, 由引理 1 知道，存在唯一 $\varphi \in L(V, U)$ 满足 $(*)$ 式.

定理 1 设 V, W 是数域 K 上线性空间，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 是 V 的一组基，$\eta_1, \cdots, \eta_n$ 是 W 的一组基，令

$$\Theta : L(V, W) \to K^{n\times m} \quad \varphi \mapsto A,$$

其中

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)A,$$

则 Θ 是 K- 线性空间的同构映射.

证明 由注 2(2) 知， Θ 是一一映射. 下面证明 Θ 是线性映射.

设 $\Theta(\varphi) = A$, $\Theta(\psi) = B$. 则

$$(\varphi + \psi)(\xi_i) = \varphi(\xi_i) + \psi(\xi_i)$$

$$= (a_{i1}\eta_1 + a_{i2}\eta_2 + \cdots + a_{in}\eta_n) + (b_{i1}\eta_1 + \cdots + b_{in}\eta_n)$$

$$= (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \begin{pmatrix} a_{i1} + b_{i1} \\ a_{i2} + b_{i2} \\ \cdots \\ a_{in} + b_{in} \end{pmatrix}.$$

所以

$$(\varphi + \psi)(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)(A + B).$$

故

$$\Theta(\varphi + \psi) = A + B = \Theta(\varphi) + \Theta(\psi).$$

又

$$(a\varphi)(\xi_i) = a(\varphi(\xi_i)) = a(a_{i1}\eta_1 + a_{i2}\eta_2 + \cdots + a_{in}\eta_n) = (\eta_1, \eta_2 \cdots, \eta_n) \begin{pmatrix} aa_{i1} \\ aa_{i2} \\ \cdots \\ aa_{in} \end{pmatrix},$$

所以

$$(a\varphi)(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)aA.$$

即

$$\Theta(a\varphi) = aA = a\Theta(\varphi).$$

这样， Θ 是线性映射. □

推论 1 设 V 是 m 维线性空间， W 是 n 维线性空间，则 $\dim L(V, W) = mn$.

推论 2 设 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 下的坐标是 $X = (a_1, a_2, \cdots, a_m)'$, 则 $\varphi(\alpha)$ 在基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的坐标是 AX.

证明 由 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, 设 $\varphi(\alpha) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. 则

$$\varphi(\alpha) = a_1\varphi(\xi_1) + \cdots + a_m\varphi(\xi_m) = (\varphi(\xi_1), \cdots, \varphi(\xi_m)) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$= (\eta_1, \cdots, \eta_n) A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}. \quad \square$$

记 σ_1 为同构映射 $\sigma_1 : V \cong K^m$, $\alpha = \Sigma_{i=1}^m a_i \xi_i \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, 记 σ_2 为同构映射 $\sigma_2 : U \cong K^n, \beta = \Sigma_{i=1}^m b_i \eta_i \longmapsto \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 记 $\mathcal{A}$ 为线性映射 $\mathcal{A} : K^m \to K^n, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, 则有下面的结论.

定理 2 记号如上，则有 $\sigma_2 \varphi = \mathcal{A} \sigma_1$. 即有下列所示的交换图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_1"] & U \arrow[d, "\sigma_2"] \\ K^{m\times 1} \arrow[r, "\mathcal{A}"] & K^{n\times 1} \end{tikzcd}$$

.

证明 对于任意的 $\alpha = \Sigma_{i=1}^m a_i \xi_i = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}\sigma_1(\alpha) = \mathcal{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ $= A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, 另一方面， $\sigma_2 \varphi(\alpha) = \sigma_2((\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$.

所以 $\sigma_2\varphi = \mathcal{A}\sigma_1$. $\square$

要特别注意上面的两个定理得前提是分别取定 V 和 U 的一组基. 当取不同的基时有下面的结论.

定理 3 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 和 $\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_m'$ 是 V 的基且

$$(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_m') = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)P.$$

设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 和 $\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_n'$ 是 W 的基且

$$(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_n') = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q.$$

设 $\varphi \in L(V,W)$,

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m) = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A_{n\times m},$$

$$\varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_m') = (\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_n')B_{n\times m}.$$

则 $B = Q^{-1}AP$, 即 A 相抵于 B.

反之，若 $A,B \in K^{n\times m}$ 是相抵的，则 A,B 是同一个线性映射在两组不同基下的矩阵.

证明 因为

$$\varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_m') = \varphi(\xi_1,\cdots,\xi_m)P = (\eta_1,\cdots,\eta_n)AP = (\eta_1',\cdots,\eta_n')Q^{-1}AP,$$

所以 $B = Q^{-1}AP$.

反之，设存在可逆阵 P,Q, 使得 $B = Q^{-1}AP$. 设 V 是 m 维线性空间，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是 V 的一组基， U 是 n 维线性空间， $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 U 的基. 则 A 决定了一个 $\varphi \in L(V,U)$ 满足

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m) = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A.$$

设 $\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_m'$ 是 V 的另一个基，满足

$$(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_m') = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)P,$$

$\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_n'$ 是 U 的另一个基，满足

$$(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_n') = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q.$$

则有

$$\varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_m')=(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_n')B. \quad \square$$

推论 3 设 V 是 m 维线性空间， U 是 n 维线性空间， $\varphi\in L(V,U)$. 则存在 V 的基 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 和 U 的基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 使得

$$\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_m)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

三. n 维空间 V 的线性变换与 n 阶方阵

定义 1 设 A,B 是两个 $K-$ 代数，若存在 $K-$ 空间同构映射 $\Theta:A\to B$ 且满足 $\Theta(\alpha\beta)=\Theta(\alpha)\Theta(\beta)$, 则称 Θ 是 $K-$ 代数同构.

定理 4 设 V 是数域 K 上 n 维空间， $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一组基，令

$$\Theta: L(V)\to K^{n\times n}, \quad \varphi\mapsto A,$$

其中

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A.$$

则 Θ 是代数同构.

证明 由上面定理知 Θ 是线性空间的同构映射. 设 $\varphi,\psi\in L(V)$, 且

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A,$$

$$\psi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)B,$$

则

$$\psi\varphi(\xi_i)=\psi(a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\cdots+a_{in}\xi_n)$$
$$=(\psi(\xi_1),\psi(\xi_2),\cdots,\psi(\xi_n))\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{in} \end{pmatrix}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)B\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{in} \end{pmatrix}.$$

所以

$$\psi\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)BA,$$

即

$$\Theta(\psi\varphi) = \Theta(\psi)\Theta(\varphi). \quad \square$$

推论 4 设 V 是 n 维线性空间，则 $\dim L(V) = n^2$.

推论 5 定理 4 中的 Θ 满足：

(1) $\Theta(\mathrm{id}_V) = I_n$;

(2) φ 是 V 的自同构的充分必要条件是 $\Theta(\varphi)$ 是可逆矩阵且 $\Theta(\varphi^{-1}) = \Theta(\varphi)^{-1}$.

注 3 定理 1 和定理 4 的重要性在于他们架起了联系线性映射 (线性变换) 与矩阵的桥梁. 由此，我们可以从矩阵的结论得到线性映射的结论，可以从线性映射的结论得到矩阵的结论. 我们可以将矩阵的问题转化成线性映射的问题来解决，也可将线性映射的问题转化成矩阵的问题来考虑.

例 2 设 V 是 n 维线性空间， $\varphi \in L(V)$, 则存在 $\psi, \sigma \in L(V)$ 使得 $\varphi = \psi\sigma$, 其中 $\psi^2 = \psi, \sigma$ 是可逆变换.

证明 取 V 的基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$, 则

$$\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)A,$$

$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}PQ$. 令 $B = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$,$C = PQ$. 则 $B^2 = B, C$ 是可逆阵，且 $A = BC$. 令 $\psi, \sigma \in L(V)$ 使得

$$\psi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)B,$$

$$\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)C.$$

因 $A = BC$, 由同构对应，有 $\varphi = \psi\sigma, \psi^2 = \psi, \sigma$ 是可逆变换. $\square$

四. 矩阵的相似

定理 5 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 $\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_n'$ 是 V 的两组基且

$$(\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_n') = (\xi_1, \cdots, \xi_n)P.$$

设 $\varphi \in L(V)$, 且

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A,$$

$$\varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')=(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')B,$$

则 $B=P^{-1}AP$.

反之，设 $A,B\in K^{n\times n},B=P^{-1}AP$, 则 A,B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵.

证明 类似定理 3 的证明. □

定义 2 设 $A,B\in K^{n\times n}$. 若存在可逆阵 $P\in K^{n\times n}$ 使得 $B=P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 相似，记为 $A\approx B$.

注 4 定理 5 说明两个阶矩阵相似的充分必要条件是：它们是一个 n 维空间上同一个线性变换在不同基下的矩阵.

命题 1 相似关系是等价关系，即

(1) $A\approx A$;

(2) 若 $A\approx B$, 则 $B\approx A$;

(3) 若 $A\approx B$, $B\approx C$ 相似，则 $A\approx C$.

作业 P_{171} 1, 2, 10; P_{180} 11, 12, 14 (提示：扩基的办法)

思考： P_{171} 4, 6, 7, 8

挑战题： P_{171}, 9