§4.2 线性映射的运算

教学目的和要求 熟练理解与掌握 $L(V,U)$ 线性空间的结构和 $L(V)$ 的代数结构. 了解 $K^{n\times n}$ 是 K- 代数，为下一节证明 $L(V,U)\cong K^{m\times n}$, $L(V)\cong K^{n\times n}$ 作准备.

一. $L(V,U)$

设 V,U 是数域 K 上线性空间，记 $L(V,U)$ 为从 V 到 U 的所有线性映射构成的集合，记 $L(V)$ 是所有从 V 到 V 的线性变换构成的集合.

定理 1 在 $L(V,U)$ 中，定义加法与数乘：

$$\varphi+\psi: V\to U,\quad (\varphi+\psi)(\alpha)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),$$

$$a\varphi: V\to U,\quad (a\varphi)(\alpha)=a\varphi(\alpha),$$

则 $\varphi+\psi, a\varphi\in L(V,U)$ 且 $L(V,U)$ 对以上定义加法与数乘构成 K 上线性空间.

注 当 $U=K$ 时，线性映射 $\varphi: V\to K$ 称为线性函数， $L(V,K)$ 称为 V 的共轭空间，记为 V^*. 当 $\mathrm{dim}V=n$ 时， V^* 称为 V 的对偶空间.

二. $L(V)$

定义 设 A 是集合， K 是数域，在 A 定义加法，乘法，定义 K 和 A 的数乘，满足：

(1) A 对于加法和数乘构成 K 上线性空间；

(2) 结合律：对于任意的 $a,b,c\in A$, 有 $a(bc)=(ab)c$;

(3) 存在乘法的单位元 $e\in A$, 使得对于任意 $a\in A$, 有 $ea=a=ae$;

(4) 乘法与加法协调：对于任意的 $a,b,c\in A$, 有 $a(b+c)=ab+ac, (a+b)c=ac+bc$;

(5) 乘法与数乘协调：对于任意的 $a,b,\in A$, $\lambda\in K$, 有 $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$.

则称 A 是 K- 代数.

例 1 $K^{n\times n}$ 对于矩阵的加法，数乘和乘法构成 K- 代数.

定理 2 设 V 是数域 K 上线性空间，则 $L(V)$ 是 K 代数，其中的乘法是映射的合成，即 $\varphi\phi(\alpha) := \varphi(\psi(\alpha))$.

证明 首先证明对于任意的 $\varphi, \psi \in L(V)$, $\varphi\psi \in L(V)$, 即证明线性变换的乘法还是线性映射.

其次证明以上定义中的 (2)-(5). 例如 (5) 的证明: 对于任意的 $\varphi, \psi, \in L(V)$, $\lambda \in K$, $\alpha \in V$, $(\lambda(\varphi\psi))(\alpha) = \lambda((\varphi\psi))(\alpha) = \lambda(\varphi(\psi(\alpha))) = \varphi(\lambda(\psi(\alpha))) = \varphi((\lambda\psi)(\alpha)) = (\varphi(\lambda\psi))(\alpha)$, 所以 $\lambda(\varphi\psi) = \varphi(\lambda\psi)$. 同理， $\lambda(\varphi\psi) = (\lambda\varphi)\psi$. □

注 1 对于 V 的线性变换 φ, 有 $\varphi^n\varphi^m = \varphi^{n+m}, (\varphi^n)^m = \varphi^{nm}$; 若 φ 可逆，定义 $\varphi^{-n} = (\varphi^{-1})^n, \varphi^0 = \mathrm{id}_V$, 则 $\varphi^{-n} = (\varphi^n)^{-1}$.

注 2 一般地， $\varphi\psi \neq \psi\varphi$(见 P148. 习题 1).

注 3 设 $\varphi, \psi \in L(V), \varphi, \psi$ 可逆， $0 \neq \lambda \in K$, 则 $(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}, (\lambda\varphi)^{-1} = \lambda^{-1}\varphi^{-1}$.

例 2 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间且 $V = V_1 \bigoplus V_2$. 对 $i = 1, 2$, 定义

$$\tau_i : V \to V_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \mapsto \alpha_i;$$

$$\sigma_1 : V_1 \to V, \quad \alpha_1 \mapsto \alpha_1 + 0;$$

$$\sigma_2 : V_2 \to V, \quad \alpha_2 \mapsto 0 + \alpha_2.$$

则 $\tau_i, \sigma_1, 1 \leq i \leq 2$, 是线性映射，且满足

$$\tau_j\sigma_i = \delta_{ij}\mathrm{id}_{V_i}, \quad \sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2 = \mathrm{id}_V.$$

称 τ_i 为 **投影映射**, σ_i 为 **嵌入映射**.

作业： P_{164} 4;　挑战题： P_{180} 9

思考： P_{164} 1, 2