第四章　线性映射

§4.1 线性映射的概念

教学目的和要求 熟练理解和掌握映射，单射，满射，一一映射，可逆映射的定义．熟练掌握线性映射的定义与基本性质．通过再次复习正确理解和掌握线性空间同构的性质.

一．线性映射

定义 设 V, U 是数域 K 上线性空间，映射 $\varphi : V \to U$ 称为线性映射，如果：

(1) 对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, 有 $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$;

(2) 对于任意的 $a \in V, \lambda \in K$, 有 $\varphi(a\alpha) = a\varphi(\alpha)$.

当 $V = U$ 时，称 φ 为线性变换.

例 1 (1) 零映射;

(2) 恒等变换 id_V;

(3) 数乘变换 $\lambda\mathrm{id}_V$, 其中 $0 \neq \lambda \in K$.

命题 1 设 $\varphi : V \to U$ 是线性映射，则

(1) $\varphi(0) = 0$;

(2) 对任意的 $a_i \in K$, $\alpha_i \in V$, $1 \leq i \leq 2$, 有 $\varphi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) = a_1\varphi(\alpha_1) + a_2\varphi(\alpha_2)$.

命题 2 设 $\varphi : V \to U$ 是线性映射.

(1) 设在 V 中 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，则在 U 中 $\varphi(\alpha)$ 可由 $\varphi(\alpha_1)$, $\varphi(\alpha_2), \cdots, \varphi(\alpha_m)$ 线性表示;

(2) 若 φ 是单的，在 U 中 $\varphi(\alpha)$ 可由 $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \cdots, \varphi(\alpha_m)$ 线性表示，则在 V 中 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示;

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 在 V 中线性相关，则 $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \cdots, \varphi(\alpha_m)$ 在 U 中线性相关;

(4) 若 φ 是单线性映射，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 在 V 中线性无关, 则 $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \cdots$, $\varphi(\alpha_m)$ 在 U 中线性无关.

二. 线性同构

定义 线性映射 $\varphi: V \to U$ 称为同构映射，如果 φ 是一一的. 这时，称 V 与 U 同构，且记为 $\varphi: V \cong U$. 当 $V = U$ 时，称 φ 为自同构.

命题 3 设 V, U 是数域 K 上有限维线性空间,

(1) $\varphi: V \to U$ 是线性同构当且仅当 φ 是可逆的线性映射，即存在同构映射 $\psi: U \to V$ 使得 $\varphi\psi = \mathrm{id}_U, \psi\varphi = \mathrm{id}_V$;

(2) $V \cong U$ 的充分必要条件是 $\mathrm{dim}V = \mathrm{dim}U$.

命题 4 设 $\varphi: V \to U$ 是线性同构，则

(1) φ 保持线性相关性不变;

(2) φ 将 V 的基映射为 U 的基;

(3) 设 W 是 V 的 r 维子空间，则 $\varphi(W) := \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in W\}$ 也是 U 的 r 维子空间;

(4) 若 $V = V_1 \bigoplus V_2$, 则 $U = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$.

证明 (3) 首先证明 $\varphi(W)$ 是 U 的子空间；设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ 是 U 的基，则可证明 $\varphi(\varepsilon_1), \cdots, \varphi(\varepsilon_m)$ 是 $\varphi(W)$ 的基.

(4) 先证明 $U = \varphi(V) = \varphi(V_1) + \varphi(V_2)$; 对于任意的 $\beta \in \varphi(V_1) \cap \varphi(V_2)$, 则存在 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, 使 $\beta = \varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$. 因为 φ 单的，所以 $\alpha_1 = \alpha_2 \in V_1 \cap V_2 = 0$, 故 $\beta = \varphi(\alpha_1) = \varphi(0) = 0$. □

作业 P_{160} 2, 3; P_{180} 5, 8, 13.

思考 P_{160} 1.(1) 是； (2) 是； (3) 是； (4) 不是； (5) 不是.